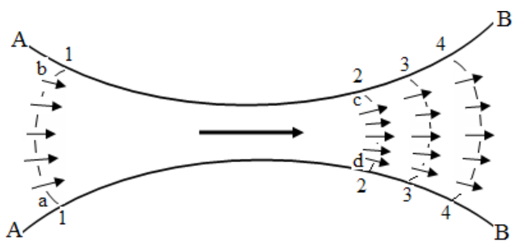
معادلة الاستمرارية (*Continuity Equation*) لجريان أحادي البعد (*One-dimensional Flow*):

1 . حالة التغير الحاد للجريان:

نتصور جريان سائل كما في الشكل (3.11) ونعين عليه مجموعة من المقاطع الحية $(1-1, 2-2, 3-3, 4-4)$. والجزيء (abcd) المحصور بين المقطعين (1−1) و(2−2) مغطى بالجدران الكتيمة (AB) التي تمنع مرور السائل إلى الخارج. نرمز للتدفق في المقطع (1−1) بالرمز (Q_1) وللتدفق عبر المقطع (2−2) بالرمز (Q_2) فخلال الزمن (dt) يدخل إلى الجزء (abcd) عبر المقطع الحي (1−1) حجم من السائل مقداره $(Q_1 \cdot dt)$ وتخرج خلال نفس الزمن كمية من السائل خلال المقطع (2−2) مقدارها $(Q_2 \cdot dt)$.



الشكل (3.11)، معادلة الاستمرارية.

لو أخذنا بعين الاعتبار أن السائل غير قابل للانضغاط (*Incompressible*) ويجري بشكل متراص دون تشكل فجوات كما أن الأغطية المتمثلة بالخطوط (A − B) كتيمة لأمكن القول: إنَّ حجم السائل الداخل يجب أن يتساوى مع حجم السائل الخارج، أي:

$$Q_1 \cdot dt = Q_2 \cdot dt \Rightarrow Q_1 = Q_2 \qquad (3.16)$$

يمكن تعميم هذه النتيجة على كافة المقاطع الحية للجريان وبالتالي يكون:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \ldots\ldots = Q = const \qquad (3.17)$$

تدعى المعادلة (3.17) بمعادلة الاستمرارية وأحياناً بمعادلة عدم قابلية الانضغاط وهي تبين أنه في حالة الحركة المستقرة تمر خلال مقطع من مقاطع التدفق في وحدة الزمن كمية ثابته من السائل.

2. حالة التغير السلس للجريان والجريان المنتظم:

في هذه الحالة يمكن كتابة معادلة الاستمرارية على الشكل التالي:

$$\omega \cdot v = const$$ (في حدود الجريان)

ومنه ينتج:

$$\omega_1 \cdot v_1 = \omega_2 \cdot v_2$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \qquad (3.18)$$

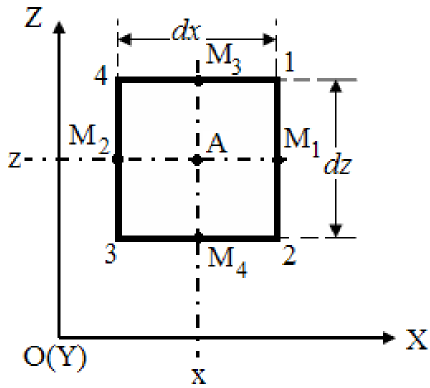
يلاحظ من المعادلة (3.18) أن السرعات المتوسطة للتدفق تتناسب عكساً مع مساحات المقاطع الحية المناظرة. ولو أخذنا بدلاً من كامل حقل جريان السائل، خيطاً واحداً للجريان لأخذت المعادلات السابقة شكلها التالي:

$$dQ = u \cdot d\omega = const$$ (في حدود خيط التيار)

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{d\omega_2}{d\omega_1} \qquad (3.19)$$

3.6.2- معادلة الاستمرارية لجريان ثلاثي البعد (*Three-dimensional Flow*) غير قابل للانضغاط (*Incompressible*):

نعين كما في الشكل (3.12) الإحداثيات (X, Y, Z) بحيث يكون المحور (Y) متعامداً مع مستوي الرسم ونحدد على الشكل نقطة ثابته (A) ذات الإحداثيات (x, y, z). ونعبر عن السرعة (u) في النقطة (A) عند الزمن (t) بمركباتها (u_x)، (u_y) و(u_z). ونحدد حول النقطة (A) متوازي سطوح ($1-2-3-4$) صغير جداً بحيث تحدد أطواله (dx)، (dy) و(dz).



الشكل (3.12)، استنتاج المعادلة (3.28).

لنحدد حجم السائل الداخل إلى متوازي السطوح خلال الزمن (dt) وحجم السائل الخارج منه عند نفس الزمن (dt).

إذا كانت مركبة السرعة الأفقية في النقطة (A) تساوي (u_x) فهي تبلغ النقطة (M_1) التي تبعد عن (A) بمقدار $(\frac{1}{2}dx)$:

$$(u_x)_{\mathrm{M}_1} = u_x + \frac{1}{2}\cdot dx \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad (3.20)$$

وعند النقطة (M_2) سوف تساوي:

$$(u_x)_{\mathrm{M}_2} = u_x - \frac{1}{2}\cdot dx \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad (3.21)$$

حيث يمثل $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ تغير قيمة (u_x) الحاصلة بالنسبة لواحدة الكتلة والمقاسة في حدود الخط $(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2)$ الموازي لمحور الإحداثيات (OX).

يحدد حجم السائل الخارج من متوازي السطوح خلال الزمن (dt) وذلك عبر الوجه $(1-2)$ بالمعادلة:

$$\Delta \mathrm{v}_1 = (u_x)_{\mathrm{M}_1}\, dt\, dy\, dz = (u_x + \frac{1}{2}dx\frac{\partial u_x}{\partial x})dy\, dz\, dt \qquad (3.22)$$

حيث إنَّ $dydz$: مساحة الوجه $(1-2)$.

كما يحدد حجم السائل الداخل إلى متوازي السطوح خلال الزمن (dt) وذلك عبر الوجه $(3-4)$ بالعلاقة:

$$\Delta v_2 = (u_x)_{M_2}\, dt\, dy\, dz = (u_x - \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}) dy\, dz\, dt \qquad (3.23)$$

ويكون تغير حجم السائل في متوازي السطوح خلال الفترة (dt) بسبب حركة السائل عبر السطحين المتقابلين $(1-2)$ و$(3-4)$ كمايلي:

$$\Delta v_1 - \Delta v_2 = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dy\, dz\, dt \qquad (3.24)$$

وبشكل مماثل يمكن أن نكتب للأوجه الأخرى المتقابلة من متوازي السطوح:

$$\Delta v_3 - \Delta v_4 = \frac{\partial u_y}{\partial y} dx dy\, dz\, dt \qquad (3.25)$$

$$\Delta v_5 - \Delta v_6 = \frac{\partial u_z}{\partial z} dx dy\, dz\, dt \qquad (3.26)$$

في حال كون السائل غير قابل للانضغاط وبافتراض أن درجة الحرارة ثابتة، يمكن أن نكتب:

$$(\Delta v_1 - \Delta v_2) + (\Delta v_3 - \Delta v_4) + (\Delta v_5 - \Delta v_6) = 0 \qquad (3.27)$$

بتعويض المعادلات (3.24)، (3.25) و(3.26) في المعادلة (3.27) والاختصار على $(dx dy\, dz\, dt)$ نحصل في النهاية على المعادلة التفاضلية لجريان السوائل غير القابلة للانضغاط:

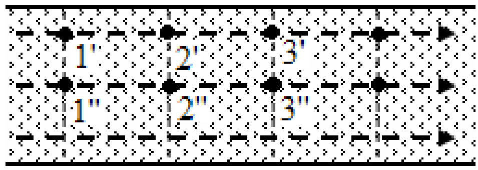
$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \qquad (3.28)$$

3.7- الجريان المنتظم وغير المنتظم للسوائل غير القابلة للانضغاط:

نستعرض حالتي الجريان المستقر وغير المستقر.

3.7.1- **الجريان المستقر**: نتصور على الشكل (3.13) مقطعاً في تيار ذي مقطع إسطواني ثابت $(\omega = const)$. نحدد على الشكل مجموعة من المقاطع الحية للجريان مع

مجموعة من المستقيمات التي توازي حدود الجريان المتمثلة في جدار الأنبوبة. إذ أنه ليس بالضرورة أن تكون هذه المستقيمات خطوطاً للتيار.



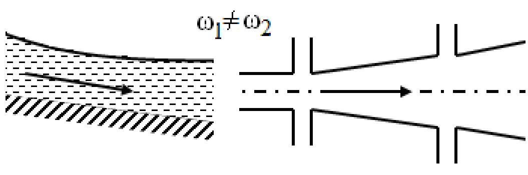
الشكل (3.13)، الجريان المنتظم.

إن مجموعة النقاط العائدة لنفس المستقيم والواقعة على مقاطع جريان مختلفة مثلاً 3' ، 2' ، 1' أو النقاط 3'' ، 2'' ، 1'' يمكن أن تدعى بالنقاط الملائمة.

يكون الجريان غير منتظم في حال:

1. إن المقاطع الحية للجريان تغير من قيمتها ($\omega \neq const$)–الشكل (3.14)–.
2. أو أن المقاطع الحية للجريان تبقى ثابتة ($\omega = const$) غير أن السرعة في النقاط الملائمة ($u_1, u_2, u_3, ...$) تكون غير متساوية فيما بينها ($u_1 \neq u_2 \neq u_3 .....$)، حيث يبين الشكل (3.15) حالة الجريان غير المنتظم.

وبالرغم من تساوي مقاطع السرعة في الأنبوبة ($\omega_1 = \omega_2$) سيما وأن المساحة (ω) تعكس قيمة الغزارة، غير أن شكل بروفيل السرعة يكون مختلف طولانياً لذلك نحصل على جريان غير منتظم.



الشكل (3.14)، الجريان غير المنتظم.

يكون الجريان منتظماً عندما تكون الحركة مستقيمة وبحيث يكون ($\omega = const$) –للتيار شكل إسطواني– وتكون السرعة (u) في النقاط الملائمة متساوية بالقيمة ومتفقة

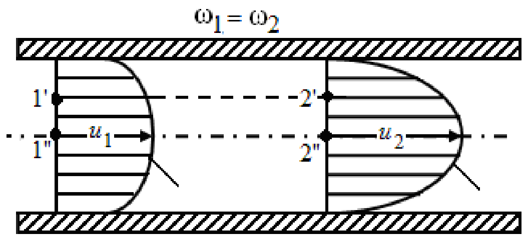
بالاتجاه، ويكون عند ذلك لمخطط توزع السرع في جميع المقاطع مساحة واحدة وبالتأكيد شكل واحد.

تتميز الحركة المنتظمة أيضاً بتوازي خطوط التيار، وبأن المقاطع الحية للجريان فيها مستوية، كما أن السرعة الوسطية (v) في مثل هذه الحركة دائماً ثابت، أي:

$$v = const$$

غير أن هذا الشرط غير كاف بمفرده لتحديد فيما إذا كان الجريان منتظماً حيث إنَّ هذا الشرط محقق أيضاً في حالة الجريان غير المنتظم (الشكل 3.15)، بالنسبة للجريان غير المنتظم فإنه داخل هذا النوع من الحركة يكون:

- تغير الحركة سلس: وذلك عندما تؤخذ المقاطع الحية للجريان على أنها مستوية.
- تغير حاد حاد: عندما لايجوز اعتبار المقاطع الحية للجريان مستوية.



الشكل (3.15)، جريان غير منتظم في أنبوب إسطواني.

3.7.2- **الجريان غير المستقر**: يجب الانتباه هنا إلى أنه عند تحديد مفاهيم الحركة للجريان غير المستقر يتم تبني وجهة نظر أويلر (وليس وجهة نظر لاغرانج). اعتماداً على ذلك تتم دراسة حقل السرعة عند لحظة زمنية معينة، وبالتالي فإذا كان الحقل متماثلاً بالنسبة للسرعة (أي في حدود الحقل المدروس تكون أشعة السرعة –أينما وجدت– متشابهة بالاتجاه ومتساوية بالقيمة) يكون الجريان منتظماً في اللحظة الزمنية المدروسة، أما عندما يكون حقل السرعة غير متماثل فتكون الحركة غير منتظمة.